Travaux dirigés Série 5
Réduction des endomorphismes

Exercice 1

Déterminer pour chacune des matrices suivantes, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres, puis dire si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R})$

Exprimer alors chacune des matrices diagonalisables en fct d'une matrice diagonale

$$1- \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$; \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$1- \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de A ssi $\exists X \neq 0$ tel que $(A_1 - \lambda I)X = 0$

ona $(A_1 - \lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} X = 0$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ -2 & -(1+\lambda) & 2 \\ 3-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3-\lambda}{2} \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 4 & -4 + \frac{(1-\lambda)(3-\lambda)}{2} \end{pmatrix} X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \\ 0 & 8 & \lambda^2 - 4\lambda - 5 \end{pmatrix} X = 0$$

(syst homogène) $L_3 \leftarrow 2L_3$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 8 & \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 8 & \lambda^2 - 4\lambda - 5 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) - \frac{(\lambda^2 - 4\lambda - 5)(1+\lambda)}{8} \end{pmatrix} X = 0$$

$(SH) \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 8 & \lambda^2-4\lambda-5 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) \end{pmatrix} X = 0 \quad (*)$

donc λ est une valeur propre de A, ssi $\exists X \neq 0$ solution du système homogène $(*)$ càd si ce système n'est pas de Cramer puisque $(*)$ triangulaire sup un de ces éléments diagonaux est nul.

soit $(1+\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = 0$

. si $\lambda = -1$ on aura $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$

si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

Donc -1 est valeur propre de A, de sous espace ~~vectoriel~~ propre associé $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = E_{-1}$

. Si $\lambda = 1$ on a $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$

soit $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

donc 1 est valeur propre de A, de sous espace propre associé $\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = E_1$

. si $\lambda = 3$

on aura $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$

donc 3 est valeur propre de A, de sous espace propre associé $E_3 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet 3 valeurs propres distinctes, alors A, est diagonalisable.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Alors $A_1 = PDP^{-1}$

Calculons P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

et $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A_2 - \lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda - 1)(2 - \lambda) \end{pmatrix} X = 0$$

λ est valeur propre ssi $\lambda \in \{0, 1, 2\}$

$\longrightarrow$ on montre que $E_0 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $E_1 = \text{Vect}\{($

On conclut que A_2 est diagonalisable

Puisque $A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet 3 valeurs propres distinctes

on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et alors $A_2 = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A_3 - \lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda - 1) \end{pmatrix} X = 0$$

λ est valeur propre de A_3 ssi $\lambda \in \{1, 0\}$

. si $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

donc $E_0 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\dim(E_0) = 1$

. si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit $2x - y - 2z = 0$ donc $(x, y, z) = (x, 2x - 2z, z) / x, z \in \mathbb{R}$

c'à d $(x, y, z) = x(1, 2, 0) + z(0, -2, 1)$

Donc $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

on remarque que $\dim(E_1) = 2$, et 1 est sa valeur propre double de A_3

Comme $A_3 \in M_3(\mathbb{R})$ et la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 1 et 2 est 3 alors A_3 est diagonalisable

on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

4 - $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

λ est sa valeur propre de A_4 ssi $(A_4 - \lambda I) X = 0 \quad (X \neq 0)$

$$(A_4 - \lambda I) X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6 - \lambda & 9 \\ 0 & -2 & -3 - \lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{pmatrix} X = 0$$

donc λ est valeur propre de A_4 ssi $\lambda \in \{-1, 1\}$

Si $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$ Donc $E_{-1} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$ càd $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

ona $\dim(E_1) = 1 \neq 2$ (ordre de multiplicité de $\lambda = 1$)

donc A_4 n'est pas diagonalisable

Exercice 2

Soient a, b et c trois nbres complexes

Diagonaliser : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$

ona $(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + z = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x \\ y = \lambda^2 x \\ (1 - \lambda^3)x = 0 \end{cases}$$

1er cas : si $1 - \lambda^3 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ alors $x = 0$

et par conséquent $y = z = 0$ d'où λ n'est pas valeur propre de A

2ème cas : si $1-\lambda^3 = 0$

Alors $(A-\lambda I)X = 0 \iff \begin{cases} y = \lambda^2 x \\ z = \lambda x \end{cases}$

ona $1-\lambda^3 = 0 \iff \lambda^3 = 1$

$\iff \lambda = 1, j, j^2 \quad / \; j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Ainsi $Sp(A) = \{1, j, j^2\}$ et $E_1 = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$E_j = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right\}$ et $E_{j^2} = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right\}$

donc $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et possède 3 vecteurs propres distincts dans $\mathbb{C}$.

donc A est diagonalisable.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$

ona $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$ (car A est diagonalisable)

Et ona $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$

on détermine P^{-1}

soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ tq $PX = X'$

ona $\begin{cases} x+y+z = x' \\ x+j^2y+jz = y' \\ x+jy+j^2z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(x'+y'+z') \\ y = \frac{1}{3}(x'+jy'+j^2z') \\ z = \frac{1}{3}(x'+j^2y'+jz') \end{cases}$

Soit $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&j/3&j^2/3\\1/3&j^2/3&j/3\end{pmatrix}$

2) On pose $M = \begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$

On diagonise la matrice M

ona $M = aI_3 + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} + cA$ et

et $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

d'où $M = aI_3 + bA^2 + cA$.

ona $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constitué de valeurs propres $1, j$ et j^2.

Alors $AX_1 = X_1$, $AX_2 = jX_2$ et $AX_3 = j^2X_3$, $A^2X_1 = X_1$

$A^2X_2 = j^2X_2$, $A^2X_3 = jX_3$.

Donc $MX_1 = (a+b+c)X_1$; $MX_2 = (a+bj^2+cj)X_2$.

et $MX_3 = (a+bj+cj^2)X_3$.

On conclut que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constitué de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $a+b+c$; $a+bj^2+cj$ et $a+bj+cj^2$.

ona donc $M = P\begin{pmatrix}a+b+c&0&0\\0&a+bj^2+cj&0\\0&0&a+bj+cj^2\end{pmatrix}P^{-1}$

avec P^{-1} défini dans la 1ère partie de la question.

Effectivement ona $P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, j, j^2)$

Alors $P^{-1}MP = P^{-1}(aI_3 + bA^2 + cA)P$

$= aP^{-1}I_3P + bP^{-1}A^2P + cP^{-1}AP$

$= aI_3 + b(P^{-1}AP)^2 + cD$

$= aI_3 + bD^2 + cD$

$= a\,\text{diag}(1,1,1) + b\,\text{diag}(1, j^2, j^4) + c\,\text{diag}(1, j, j^2)$

$= \text{diag}(a+b+c;\ a+bj^2+cj\ ,\ a+bj^4+j^2c)$

M est semblable à une matrice diagonale alors M est diagonalisable

de spectre $\{a+b+c;\ a+bj^2+cj\ ;\ a+bj+cj^2\}$

et comme $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$ alors $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$

Est une base $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres M respectivement

associés aux valeurs propres $a+b+c$, $a+bj^2+cj$, $a+bj+cj^2$.

Exercice 3

Trouver a, b, c, a', b' et c' des nbres réels pour que

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour des vecteurs propres

Corrigé

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Notons que U, V, W sont des éléments non nuls de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

Alors U, V, W vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$ ssi $\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

tq $AU = \alpha U$; $AV = \beta V$; $AW = \gamma W$

d'où $\begin{cases} 1+a+a' = \alpha \\ 1+b+b' = \alpha \\ 1+c+c' = \alpha \end{cases}$ ① ; $\begin{cases} 1-a' = \beta \\ 1-b' = 0 \\ 1-c' = -\beta \end{cases}$ ② ; $\begin{cases} 1-a = \gamma \\ 1-b = -\gamma \\ 1-c = 0 \end{cases}$ ③

③ $\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1-a \\ a+b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$ ② $\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1-a' \\ b' = 1 \\ a'+c' = 2 \end{cases}$

③ $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1+a+a' \\ 1+b+b' = 1+a+a' \\ 1+c+c' = 1+a+a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1+a+a' \\ b+b' = c+c' \\ c+c' = 1+a' \end{cases}$

soit $\begin{cases} b' = 1 \\ c = 1 \\ b = 2-a \\ c' = 2-a' \end{cases}$ et $\begin{matrix} a+a' = 2a-1 \\ 1+(2-a') = 3 \end{matrix}$

Donc $\begin{cases} b' = 1 \\ c = 1 \\ a = 1 \\ a' = 1 \\ c' = 1 \\ d' = 1 \end{cases}$ Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A ssi $a = b = c = a' = b' = c' = 1$

Exercice 4

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$ A est-elle diagonalisable

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\lambda \end{vmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4+2t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 3-\lambda & 1 & 4+2t-\lambda \end{vmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda-3)L_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4+2t \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & \lambda-2 & Q(\lambda) \end{vmatrix}$

avec $Q(\lambda) = 1+t+(\lambda-3)(4+2t-\lambda)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -1-t \\ 0 & 0 & Q(\lambda)-1-t \end{vmatrix}$$

$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ non inversible

$\Leftrightarrow 2-\lambda = 0$ ou $Q(\lambda)-1-t$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $(\lambda-3)(4+2t-\lambda)=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 4+2t \end{cases}$

donc $Sp(A) = \{2, 3, 4+2t\}$

si $4+2t = 2 \Leftrightarrow t = -1$ et $4+2t = 3 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

* si $t \neq -1$ et $t \neq -\frac{1}{2}$

si $t \neq -1$ et $t \neq -\frac{1}{2}$ alors A possède 3 valeurs propres distinctes 2 à 2 et ona $A \in M_3(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable

* si $t = -1$ $\quad Sp(A) = \{2, 3\}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2x + 2y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \end{cases}$$

~~$AX = 2X \Leftrightarrow \{ y =$~~

Donc le sous espace propre associé à $\lambda = 2$ est un plan :

$E_2 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. $\dim E_2 = 2$

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3x \\ 2y = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

Donc le sous espace vectoriel propre associé à $\lambda = 3$ est $E_3 = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $\dim E_3 = 1$ ona bien $\dim(E_2) + \dim(E_3) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

et $\dim(E_2) = m_2$ et $\dim E_3 = m_3$

avec m_2 : ordre de multiplicité de $\lambda = 2$

m_3 : ordre de multiplicité de $\lambda = 3$.

ce qui implique que A est diagonalisable

si $t = -1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et $\dim E_2 = 1$

$$AX = 3X \iff \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$$ alors $E_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

et $\dim E_3 = 1 \neq m_3 = 2$

donc A n'est pas diagonalisable

car $\dim(E_2) + \dim(E_3) = 2 < 3$

En conclusion A n'est diagonalisable que si $t \neq \frac{-1}{2}$